EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….096**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele $A(-2,-2,-2)$ și $B(3,3,3)$.

(4p) **b)** Să se determine raza cercului $(x+1)^2+(y-1)^2=9$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2=4x$ în punctul $P(4,4)$.

(4p) **d)** Să se calculeze modulul numărului complex $\dfrac{7+5i}{5-7i}$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria unui triunghi cu vârfurile în punctele $M(2,0)$, $N(3,3)$ și $P(0,2)$.

(2p) **f)** Să se calculeze produsul $(cos1^\circ - cos7^\circ)\cdot(cos2^\circ - cos6^\circ)\cdot\ldots\cdot(cos7^\circ - cos1^\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze suma primilor 5 termeni dintr-o progresie aritmetică în care primul termen este 1 și rația este 4.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $2^n\le 3n$.

(3p) **c)** Să se calculeze suma elementelor grupului $(\mathbf{Z}_7,+)$.

(3p) **d)** Să se calculeze expresia $E=C_5^1-C_5^2+C_5^3-C_5^4$.

(3p) **e)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3+2x^2+x+2=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=sin\,x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_0^n \sin x\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{4} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{4} \end{pmatrix}$

și mulțimea $U = \{X \in M_2(\mathbf{R}) \mid X^2 = X\}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei L.

(4p) **b)** Să se verifice că $I \in U$ şi că $L \in U$.

(4p) **c)** Să se verifice că $\forall a,b \in \mathbf{R}$, matricele $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ sunt din mulțimea U.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că dacă matricea $B \in U$, atunci $B^n = B$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$, atunci $a + d \in \{0,1,2\}$.

(2p) **f)** Să se scrie matricea M ca o sumă finită de matrice din mulțimea U .

(2p) **g)** Să se arate că matricea K **nu** se poate scrie ca o sumă finită de matrice din mulțimea U.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră mulțimea $A = \mathbf{R} - \{1,2,3,...,2006\}$ şi funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f(x) = (x-1)(x-2)...(x-2006)$ şi $g : A \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + ... + \frac{1}{x-2006}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $g'(x)$, $x \in A$.

(4p) **b)** Să se arate că $g'(x) < 0$, $\forall x \in A$.

(4p) **c)** Să se arate că $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $\forall x \in A$.

(2p) **d)** Să se arate că $(f'(x))^2 > f(x) \cdot f''(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se determine numărul de asimptote verticale ale graficului funcției g.

(2p) **f)** Să se calculeze $\int_{2007}^{2008} (g(x+1) - g(x))dx$.

(2p) **g)** Utilizând eventual rezultatul de la punctul **c)** , să se arate că ecuația $f(x) - af'(x) = 0$ are exact 2006 soluții reale şi distincte, $\forall a \in \mathbf{R}$.